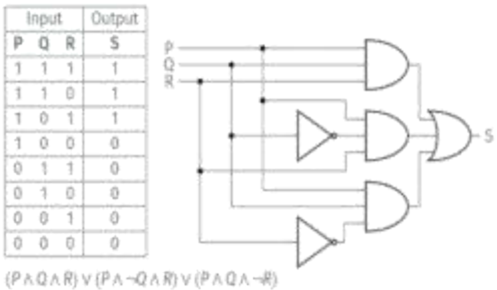
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

Module **Logique Mathematique** 2ème Année Licence

Cours 4

Logique des propositions



Théorie de la démonstration

BY : BENAISSI Sellami s.benaissi@gmail.com

OCT 2022

PLAN

Part 1

Rappelle

Définitions

Théorème de substitution Soient α une formule contenant la variable propositionnelle A, et α' la formule obtenue en substituant toutes les occurrences de A par la formule β. Alors : $\vDash \alpha \Rightarrow \vDash \alpha'$

Théorème de remplacement Soient α une formule contenant β et α' la formule obtenue en remplaçant β par β'. Alors:
$\beta \equiv \beta' \Rightarrow \alpha \equiv \alpha'$.

littéral On appel «littéral», une proposition élémentaire (atome) ou la négation d'une proposition

Conjonction de littéraux
$\phi_1 = A \wedge B$
$\phi_2 = \neg A \wedge B$
$\phi_3 = A \wedge \neg B$
$\phi_4 = \neg A \wedge \neg B$

Disjonction de littéraux
$\Psi_1 = A \vee B$
$\Psi_2 = \neg A \vee B$
$\Psi_3 = A \vee \neg B$
$\Psi_4 = \neg A \vee \neg B$

RAPPELLE

Les Formes Normales

Forme normale conjonctive (FNC)

Une formule α est **sous forme normale conjonctive** si elle est de la forme $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ tel que les C_i sont de la forme $L_1 \vee L_2 \vee \ldots\ldots \vee L_n$ (les L_i sont des littéraux, les C_i sont des clauses)

On appelle forme normale conjonctive (FNC) toute conjonction de disjonction de littéraux.

Forme normale disjonctive (FND)

Une formule α est **sous forme normale disjonctive** si elle est de la forme $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ tel que les C_i sont de la forme $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$ (les L_i sont des littéraux)

On appelle forme normale disjonctive (FND) toute disjonction de conjonction de littéraux.

Système complet de connecteurs

Un ensemble Ω de connecteurs est un système complet de connecteurs (SCC) si toute formule de la forme □α et α□□ peut s’exprimer au moyen des connecteurs de □.

Part 2

Terminologie et vocabulaire

Terminologie ou vocabulaire

Définition (Théorie de la démonstration)

La théorie de la démonstration, aussi connue sous le nom de théorie de la preuve (de l'anglais proof theory), est une branche de la logique mathématique. Elle a été fondée par David Hilbert au début du 20me siècle.

théorie de la démonstration نظرية البرهان

Terminologie ou vocabulaire

Axiome

- L' Axiome est un énoncé admis comme vrai.
- L' Axiome est une proposition évidente par elle-même et qui n'est susceptible d'aucune démonstration.

Axiome بديهية

Terminologie ou vocabulaire

Axiome

Exemple 1 :

Axiomes d'Euclide (IVe siècle av JC) :

1. Étant donnés deux points A et B, il existe une droite passant par A et B;
2. Tout segment [AB] est prolongeable en une droite passant par A et B;
3. Pour tout point A et tout point B distinct de A, on peut décrire un cercle de centre A passant par B;
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux;
5. Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite

Axiome بديهية

Terminologie ou vocabulaire

Théorème

- Le Théorème est un énoncé qui est conséquence logique des axiomes.
- Le Théorème est une Proposition démontrable qui résulte d'autres propositions déjà posées (opposé à définition, axiome, postulat, principe).

Théorème	نظرية، مبرهنة

Terminologie ou vocabulaire

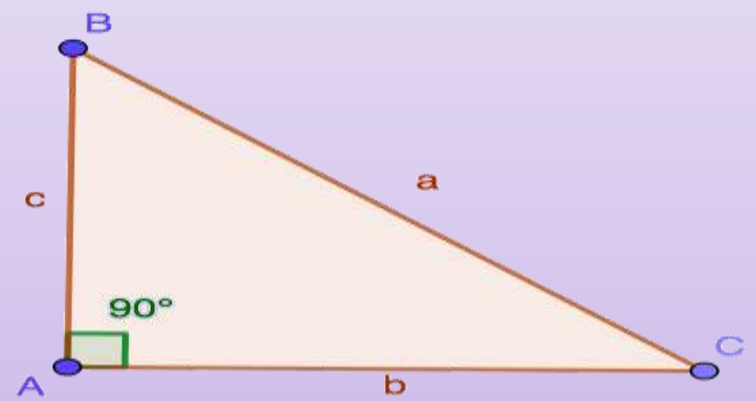
Théorème

Exemple 1 :

Géométrie Euclidienne

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Théorème	نظرية، مبرهنة

Terminologie ou vocabulaire

Hypothèse

- L'Hypothèse est une Proposition admise soit comme donnée d'un problème, soit pour la démonstration d'un théorème (axiome ; postulat).
- L'Hypothèse est un Énoncé déjà établi et qui constitue une base de référence dans la démonstration d'une nouvelle proposition.

Hypothèse	فرضية

Terminologie ou vocabulaire

Preuve

- La preuve est une Suite d'affirmations logiquement ordonnées à partir d'un certain nombre d'hypothèses et devant conduire à une conclusion attendue.
- La preuve peut faire intervenir des résultats déjà démontrés antérieurement ou d'autres énoncés de la théorie tels que des axiomes, des postulats ou des définitions de termes de la théorie.

preuve برهان

Terminologie ou vocabulaire

Preuve

Preuve : Argumentation permettant

- en un nombre fini d'étapes d'obtenir de nouvelles conséquences à partir éventuellement d'hypothèses

- en se basant sur un ensemble fini d'axiomes et des règles de déduction.

Le terme « preuve » est synonyme de « démonstration ».

conséquence	نتيجة
déduction	الاستنتاج

Part 3

Exemples de méthodes de preuve

Démonstration par contraposition

Pour montrer que **P → Q** est une proposition vraie, il suffit de montrer que **¬Q→¬P** est vraie.

- **¬Q→¬P** est appelée proposition contraposéede de la proposition **P→Q**

Idée : Une proposition et sa contraposée sont équivalentes, ce qui signifie que l'on peut démontrer l'une pour démontrer l'autre.

Démonstration par contraposition

Démonstration par contraposition

Exemple 1 :

Pour démontrer que

« S'il pleut, alors le sol est mouillé »,

il suffit de démontrer que

« Si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas ».

Démonstration par contraposition

Exercice 1

Soient **k** et **k′** deux **entiers** naturels non nuls.
Montrons que $(k \times k' = 1) \Rightarrow (k = k' = 1)$.

Solution :

- *Supposons* que $k \neq 1$ **ou** $k' \neq 1$.
- *Alors*, on a $(k \geq 2 \text{ et } k' \geq 1)$ **ou** $(k \geq 1 \text{ et } k' \geq 2)$.
- Dans les deux cas, on a $k \times k' \geq 2$ et en particulier, $k \times k' \neq 1$
- *Donc* , $(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1) \Rightarrow (k \times k' \neq 1)$
- *Par contraposition*, on a montré que

$$(k \times k' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1)$$

Démonstration par contraposition

Exercice 2

Montrons que : $\models \alpha \wedge \beta \Rightarrow (\models \alpha \text{ et } \models \beta)$.

Solution :

- *Supposons* que **$(\models \alpha$ et $\models \beta)$ est fausse**
- $\Rightarrow \alpha$ n'est pas une tautologie ou βn est pas une tautologie
- $\Rightarrow$ Il existe au moins une ligne dans la table de vérité où α est fausse ou β est fausse
- $\Rightarrow \alpha \wedge \beta$ est fausse
- $\Rightarrow \alpha \wedge \beta$ n'est pas une tautologie
- **$\Rightarrow \models \alpha \wedge \beta \Rightarrow (\models \alpha$et $\models \beta)$ est valide**

Démonstration par l'absurde (Apagogie)

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une **affirmation est vraie** en montrant que **son contraire est faux**.

On veut montrer qu une proposition **P** est vraie :

- On suppose que c'est sa négation **¬P** qui est vraie
- On montre que cela entraîne une proposition fausse.
- On en conclut que P est vraie

Schéma du raisonnement :
Quand **¬P ⇒ Q** est une proposition **vraie**, et **Q** est une proposition **fausse**, on peut affirmer que **P** est une proposition **vraie**.

Démonstration par l'absurde (Apagogie)

Exercice 1

Démontrer que: **0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$**

Solution 1:

- ✓ *Supposons* que 0 a un inverse

  $\Rightarrow \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad / \quad 0 \times A = 1$ …………..(1)

- Or $\forall X \in \mathbb{R}, \ 0 \times X = 0$

  $\Rightarrow \quad 0 \times A = 0$ ………………………… (2)

- ✓ (1) et (2) $\Rightarrow \ 0 = 1$ (Faux)

- ✓ **0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$**

Démonstration par l'absurde (Apagogie)

Exercice 1

Démontrer que: **0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$**

Solution 2:

✓ *Supposons* que 0 a un inverse

$\Rightarrow \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad / \quad A \times 0 = 1$ …………..(1)

$\Rightarrow \quad A \times 0 = A \times (0+0) = (A \times 0) + (A \times 0) = 2$……… (2)

✓ (1) et (2) $\Rightarrow$ $1 = 2$ (Faux)

✓ **0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$**

Exercice 1

Démontrer que:

$$\forall X \in \mathbb{R},\ X^0 = 1$$

Part 4

Système formel déductif

Terminologie ou vocabulaire

L'utilisation de la table de vérité est laborieuse,

- ✓ **Alternative :** Théorie de la démonstration
  - Vérifier la validité des formules
  - Déduire de nouvelles formules à partir d autres formules

- ✓ **Moyen :** Utilisation des **symboles** (seulement) : Etude syntaxique

Système formel déductif

Un **système formel de déduction** est composé:

- **des axiomes** qui représentent un petit nombre de vérités initiales
- **des règles d'inférence** qui sont les mécanismes de raisonnement pour révéler des vérités cachées.
- **des hypothèses**

il permet d'inférer des conclusions a partir de prémisses et définit donc une relation de déduction entre formules

Prémisses ⊢ Conclusion

prémisses	المقدمات
conclusions	النتائج

déduction	الاستنباط، الاستنتاج
règles d'inférence	قواعد الاستدلال

Système formel déductif

Pour dire qu'une proposition α est conséquence d'un ensemble Γ d'hypothèses, on écrit :

$$\Gamma \vdash \alpha$$

qui se lit :

de Γ on déduit α

- Les formules de Γ sont dites **hypothèses de base de la déduction**
- α est appelée **conclusion de la déduction**
- Le symbole ⊢ est appelé **symbole de déduction**
- Si Γ est vide, α est un théorème et on écrit: $\vdash \alpha$.

Système formel déductif

Pour prouver qu'une formule **C** est une conséquence logique (conclusion) d'un ensemble de formules (Hypothèses), On utilise à la fois,

- les axiomes $\mathbf{A_i}$
- les règles d inférence,
- les théorèmes $\mathbf{T_i}$
- et les hypothèses $\mathbf{H_i}$

$$\{A_i, T_i, H_i\} \vdash C$$

Système formel déductif

Axiomes :

- $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$ ……………………. (Axiome 1)
- $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$ ….. (Axiome 2)
- $(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)$ …………. (Axiome 3)

Règles d'inférence :

- $\alpha,\alpha\rightarrow\beta\vdash\beta$ ………………… (Modus Ponens)
- $\alpha\rightarrow\beta,\neg\beta\vdash\neg\alpha$ ……………… (Modus Tollens)
- $\alpha,\neg\alpha\vdash\square$ ………………… (Tiers Exclus)

Transitivité:

- $\alpha\rightarrow\beta,\beta\rightarrow\gamma\vdash\alpha\rightarrow\gamma$

Démonstration par contraposition

Exercice 1

$$\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash \alpha \to \gamma \ ?$$

Solution :

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ (Hyp)
2. β (Hyp)
3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ (A 2)
4. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ $(MP(1,3))$
5. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ (A 1)
6. $\alpha \to \beta$ $(MP(2,5))$
7. $\alpha \to \gamma$ $(MP(4,6))$

Démonstration par contraposition

Exercice 2

$$(\alpha \longrightarrow \beta)\ ,\ (\beta \longrightarrow \gamma) \vdash\ \alpha \longrightarrow \gamma\ ?$$

Solution :

1. $\alpha \longrightarrow \beta$ (Hyp)
2. $\beta \longrightarrow \gamma$ (Hyp)
3. $\alpha \longrightarrow \gamma$ (Trans)

Part 5

Preuve par résolution

Preuve par résolution

Le principe de résolution est une méthode automatique pour montrer la validité d'une formule.

Rappelle

Une clause est une formule bien formée (fbf) qui a la forme d'une disjonction de littéraux

Exemple :

- $A \vee B \vee C \vee \neg D$
- $P \vee \neg S \vee R$

Cas particulier : un littéral isolé est une clause.

- $\neg D$
- P

Preuve par résolution

Comment obtenir à partir d'une formule bien formée un ensemble de clauses ?

- Il faut d'abord **transformer** la formule en sa forme normale conjonctive **FNC** et ensuite **éliminer** les connecteurs $\wedge$.
- On obtient ainsi un ensemble S de **clauses**.

Preuve par résolution

Preuve par résolution

Le principe de résolution est formé d'une seule **règle de résolution :**

$$\frac{C1: \sigma \vee P \ , \ C2: \gamma \vee \neg P}{C3: \sigma \vee \gamma}$$

- σ et γ sont deux **clauses** (disjonctions de littéraux)
- $C3$ est dite **clause résolvante** de $C1$ et $C2$
- P et $\neg P$ sont deux **littéraux** complémentaires

Règle de résolution

Exemples:

$$\frac{C1:\ \mathrm{R} \lor P\ ,\ C2:\ \mathrm{Q} \lor \neg P}{C3:\ \mathrm{R} \lor \mathrm{Q}}$$

$$\frac{C1:\ \neg P \lor \mathrm{R} \lor \mathrm{Q}\ ,\ C2:\ \neg \mathrm{Q} \lor \neg \mathrm{S}}{C3:\ \neg P \lor \mathrm{R} \lor \mathrm{S}}$$

Règle de résolution

Exemples:

Soient C1 et C2 les deux clauses suivantes :

C1 : P   C2 : ¬P

Le résolvant de C1 et de C2 est C3 : □ la clause vide

$$\frac{C1: P\ ,\ C2: \neg P}{C3: \square}$$

Si **C1** et **C2** sont deux clauses **unitaires**, leurs résolvant s'il existe est la **clause vide □**

Règle de résolution

Exemples:

Trouver la clause résolvante dans les cas suivants :

a) **C1** = $\neg Q \vee P$ **C2** = $R \vee \neg P \vee S$

b) **C1** = $\neg Q \vee P$ **C2** = Q

c) **C1** = $\neg P \vee \neg Q$ **C2** = $P \vee S \vee \neg R$

d) **C1** = $P \vee Q$ **C2** = $R \vee P$

Preuve par résolution

Règle de résolution

Etant donné deux clauses C1 et C2 un résolvant C3 de C1 et C2 est une conséquence logique de C1 et C2

$$\{C1, C2\} \vdash C3$$

Preuve par résolution

principe de résolution

Le principe de résolution consiste à appliquer les trois étapes suivantes

1. Transformer l'ensemble des formules sous FNC
2. Eliminer les conjonctions en écrivant les clauses sur des lignes séparées
3. Appliquer la règle de résolution

Preuve par résolution

Exemples:

$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$?

$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma) \vdash (\neg\alpha \vee \gamma)$ **(FNC)**

$\{(\neg\alpha \vee \beta), (\neg\beta \vee \gamma)\} \vdash (\neg\alpha \vee \gamma)$ ....?

1) $\neg\alpha \vee \beta$ **Hyp**
2) $\neg\beta \vee \gamma$ **Hyp**
3) $\neg\alpha \vee \gamma$ **RR(1,2)**

$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ ✓

Preuve par résolution

Exemples:

$\alpha \to \beta \to \gamma \, , \beta \vdash \alpha \to \gamma$?

$\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \, , \beta \vdash (\neg\alpha \vee \gamma)$ **(FNC)**

$\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \, , \beta \vdash (\neg\alpha \vee \gamma)$ ….?

1) $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$ **Hyp**
2) β **Hyp**
3) $\neg\alpha \vee \gamma$ **RR(1,2)**

$\alpha \to \beta \to \gamma \, , \beta \vdash \alpha \to \gamma$ ✓

Preuve par résolution

Exemples:

$\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee R \vee Q, \neg Q \vee R\} \vdash R$?

1.	$P \vee Q \vee R$	Hyp
2.	$\neg P \vee R \vee Q$	Hyp
3.	$\neg Q \vee R$	Hyp
4.	$Q \vee R$	RR(1,2)
5.	R	RR(3,4)

$\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee R \vee Q, \neg Q \vee R\} \vdash R$ ✓

Preuve par résolution

Résolution par réfutation

Pour résoudre un problème de logique par la méthode de résolution, on s'appuie sur le **théorème de réfutation** :

- Pour prouver que **H** est une conséquence logique de **G**
- On transforme **G** et **¬H** en ensemble de clauses
- On applique le principe de résolution a **G ∧ ¬H** jusqu'à trouver la clause vide □

Résolution par réfutation

Exemples:

$P \vee Q \vee R, \neg P \vee R \vee Q, \neg Q \vee R\} \vdash R$?

$P \vee Q \vee R, \neg P \vee R \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R\} \vdash \square$

1.	$P \vee Q \vee R$	Hyp
2.	$\neg P \vee R \vee Q$	Hyp
3.	$\neg Q \vee R$	Hyp
4.	$\neg R$	Hyp
5.	$Q \vee R$	RR(1,2)
6.	R	RR(3,5)
7.	$\square$	RR(4,6)

$\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee R \vee Q, \neg Q \vee R\} \vdash R$ ✓

Résolution par réfutation

Exemples:

Tournoi

On suppose qu'on a les règles suivantes:

1. Si Salim rate son tournoi alors Salim sera déprimé.
2. Si Salim ne va pas à la piscine, il sera déprimé
3. Si Salim est à la piscine, il ne s'entraine pas
4. Salim ratera son tournoi s'il ne s'entraine pas

- **Transformer les énoncés en formules propositionnelles?**
- **Prouver (par réfutation) que Salim sera déprimé?**

Résolution par réfutation

Exemples:

Tournoi (solution)

1. Si Salim rate son tournoi alors Salim sera déprimé.
2. Si Salim ne va pas à la piscine, il sera déprimé
3. Si Salim est à la piscine, il ne s'entraine pas
4. Salim ratera son tournoi s'il ne s'entraine pas

Les propositions

- ✓ **T** : Salim rate son tournoi
- ✓ **D** : Salim sera déprimé
- ✓ **P** : Salim va à la piscine
- ✓ **E** : Salim s'entraine

Les formules

1 :	$T \rightarrow D$
2 :	$\neg P \rightarrow D$
3 :	$P \rightarrow \neg E$
4 :	$\neg E \rightarrow T$

$$\{T \rightarrow D\ ,\ \neg P \rightarrow D\ ,\ P \rightarrow \neg E\ ,\ \neg E \rightarrow T\} \vdash D\ \ ?$$

Résolution par réfutation

Exemples:

Tournoi (solution)

$\{T \rightarrow D\ ,\ \neg P \rightarrow D\ ,\ P \rightarrow \neg E\ ,\ \neg E \rightarrow T\} \vdash D$?

$\{\neg T \vee D,\ P \vee D,\ \neg P \vee \neg E,\ E \vee T,\ \neg D\} \vdash \square$?

1.	$\neg T \vee D$	Hyp
2.	$P \vee D$	Hyp
3.	$\neg P \vee \neg E$	Hyp
4.	$E \vee T$	Hyp
5.	$\neg D$	Hyp
6.	$D \vee \neg E$	RR(2,3)
7.	$D \vee T$	RR(6,4)
8.	D	RR(7,1)
9.	$\square$	RR(8,5)

Preuve simple

Preuve simple

La preuve simple consiste à

transformer,

décomposer et

recomposer

les **prémisses** afin de trouver la conclusion

$\{ A \rightarrow (B \vee C), B \rightarrow D, \neg(E \wedge C), F \wedge A \wedge \neg D \} \vdash (F \wedge \neg E)$?

Preuve simple

Exemples:

$\{ A \rightarrow (B \vee C), B \rightarrow D, \neg(E \wedge C), F \wedge A \wedge \neg D \} \vdash (F \wedge \neg E)$?

1.	$A \rightarrow (B \vee C)$,	Hyp (premisse)
2.	$B \rightarrow D$	Hyp (premisse)
3.	$\neg(E \wedge C)$	Hyp (premisse)
4.	$F \wedge A \wedge \neg D$	Hyp (premisse)
5.	F	
6.	A	Simplification de 4
7.	$\neg D$	
8.	$\neg E \vee \neg C$	Transformation de 3
9.	$B \vee C$	MP (1,6)
10.	$\neg B$	MT (2,7)
11.	C	RR (9,10)
12.	$\neg E$	RR (8,11)
13.	$F \wedge \neg E$	Addition (5,12)

Part 6

Arbre sémantique

Arbre sémantique

Arbres sémantiques

Les arbres sémantiques constituent un moyen pour

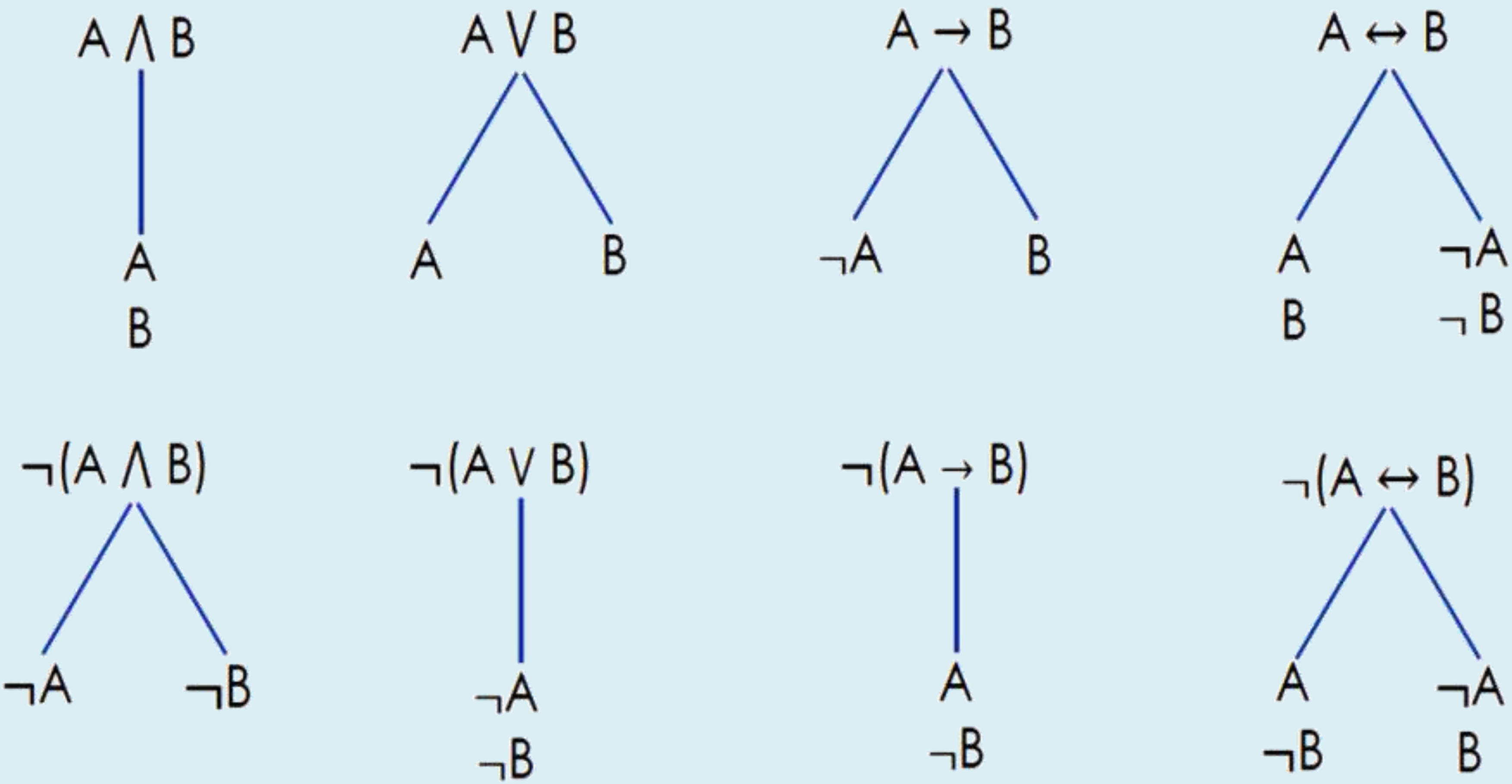
- Vérifier la validité des formules,
- Prouver des équivalences,
- Prouver des théorèmes (Faire des déduction)

Arbre sémantique VS Arbre syntaxique:

Un arbre syntaxique est un moyen de vérifier la bonne formation des formules (formule bien formée ou pas)

Arbre sémantique

Règles de branchement

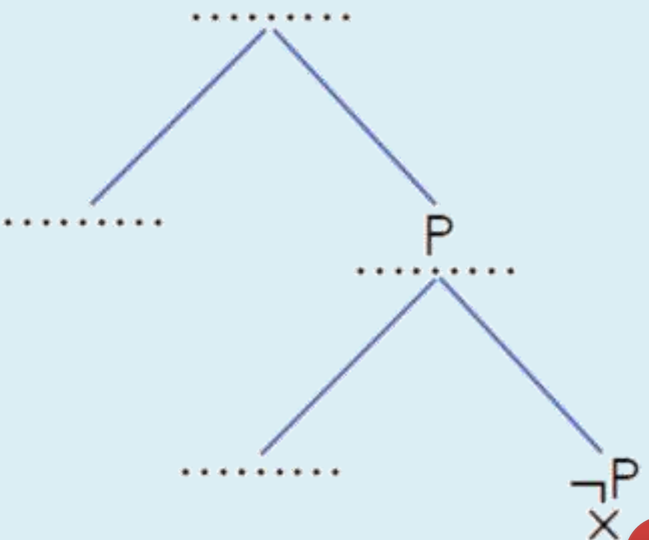


Arbre sémantique

Arbre sémantique clos

Un arbre sémantique est dit clos ou fermé, si et seulement si, toutes ses branches se terminent avec des noeuds d'échec (branches fermées),

Un noeud d'échec est identifié si la branche contient deux littéraux complémentaires



Arbre sémantique

Exemples:

Vérifier la validité de la formule suivante $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$$\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$$

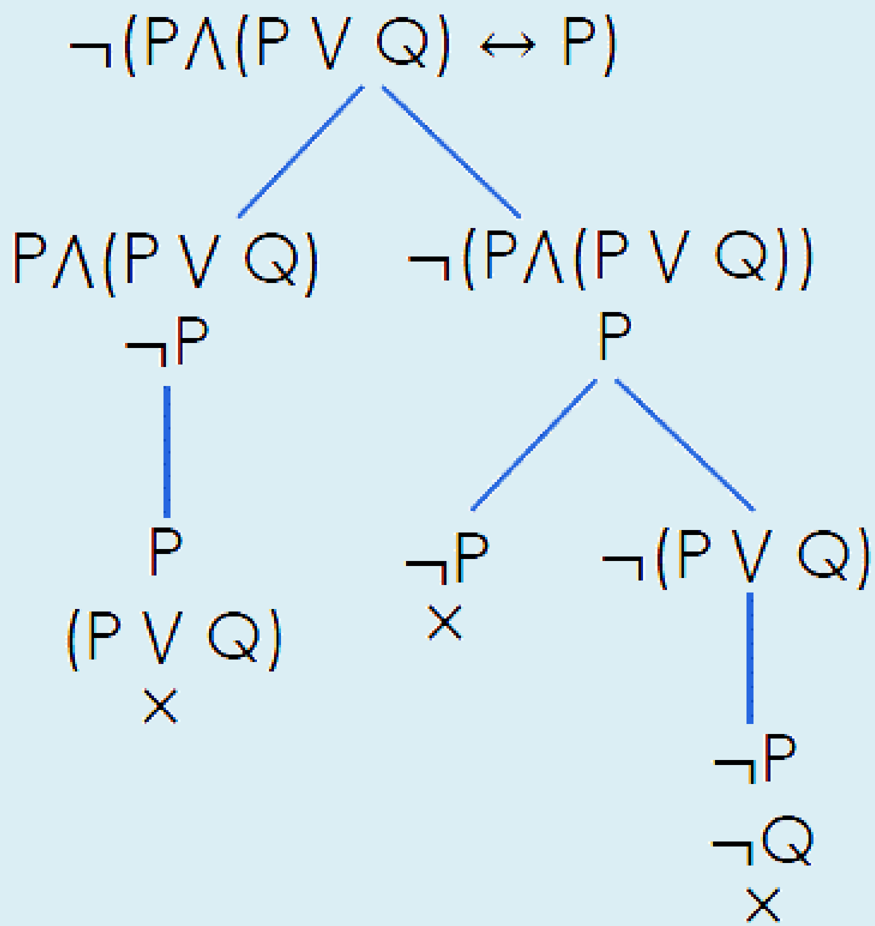
$$P$$
$$\neg(Q \rightarrow P)$$

$$Q$$
$$\neg P$$
$$\times$$

Arbre sémantique

Exemples:

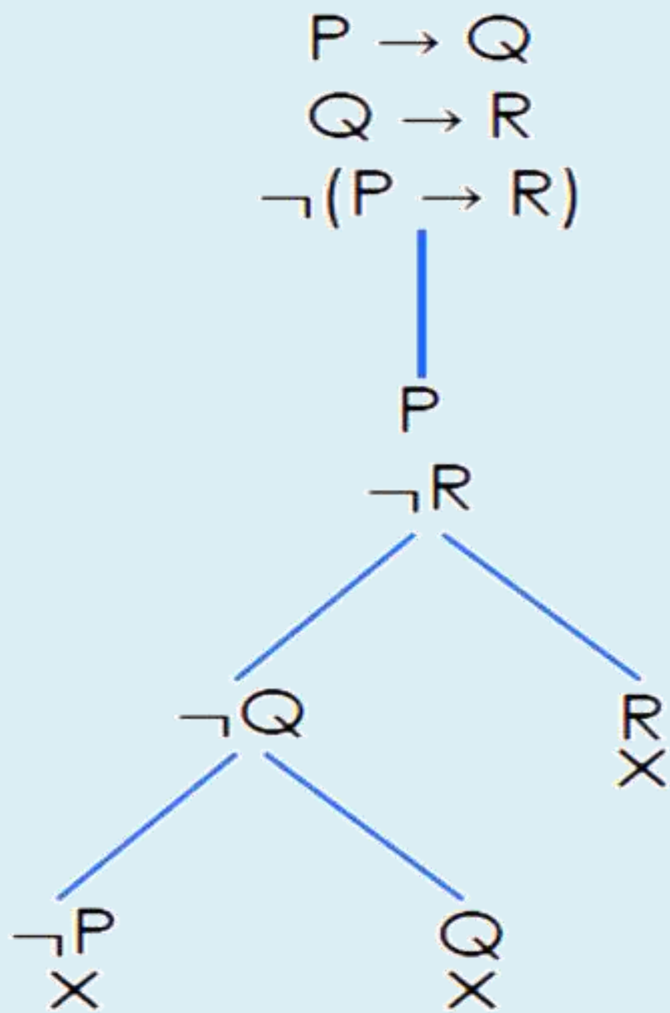
Vérifier la validité de la formule suivante $P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$



Arbre sémantique

Exemples:

Vérifier la déduction suivante $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$



Propriété d'inconsistance

Propriété d'inconsistance

Un ensemble S de clauses est dit inconsistant, si et seulement si, il existe une déduction de la clause vide à partir de S ($S \vdash \square$)

Arbre sémantique

Exemples:

Propriété d'inconsistance

$S=\{\neg P \vee \neg Q \vee R, \ \neg P \vee Q, \ P, \neg R\}$

C0:	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	
C1:	$\neg P \vee Q$	
C2:	P	
C3:	$\neg R$	
C4:	$\neg P \vee \neg Q$	RR(C0,C3)
C5:	$\neg P$	RR(C1,C4)
C6:	$\square$	RR(C2,C5)

Graphe de déduction

Graphe de déduction

Une déduction peut être représentée par un graphe **G(N,L)** dont chaque **sommet** de **N** est étiqueté par une clause et dont les **arcs** de **L** permettant de relier les clauses à leurs **résolvantes**

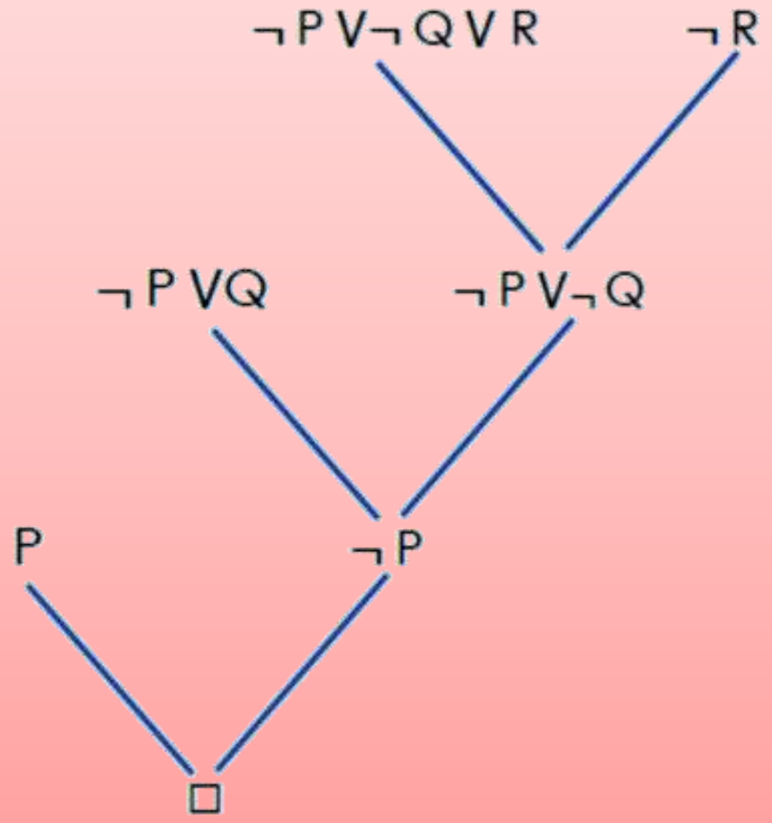
Graphe de déduction

Exemples:

Graphe de déduction

S={¬P ∨ ¬Q ∨ R, ¬P ∨ Q , P , ¬R}

C0:	¬P∨¬Q ∨ R	
C1:	¬P ∨ Q	
C2:	P	
C3:	¬R	
C4:	¬P ∨ ¬Q	RR(C0,C3)
C5:	¬P	RR(C1,C4)
C6:	□	RR(C2,C5)



Thank you